ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φεβρουάριος 2014

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

Θέμα 1 : α) Αν $x \in C^n$, να αποδείξετε ότι $\|x\|_2^2 \le \|x\|_1 \|x\|_\infty$.
β) Αν $A \in R^{n,n}$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, να αποδείξετε ότι $\kappa_2(A) = \frac{\max_i \lambda_i}{\min_i \lambda_i}$, όπου $\max_i \lambda_i$ και $\min_i \lambda_i$ είναι η μεγαλύτερη και η μικρότερη, αντίστοιχα, ιδιοτιμή του A και $\kappa_2(\cdot)$ είναι ο δείκτης κατάστασης που αντιστοιχεί στη $\|\cdot\|_2$.

Θέμα 2 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

α) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η μέθοδος Gauss-Seidel.
β) Να βρεθεί περιοχή για την παράμετρο ω για την οποία η μέθοδος παρεκβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel συγκλίνει. Στη συνέχεια να βρεθεί η βέλτιστη παράμετρος ω καθώς και η αντίστοιχη φασματική ακτίνα.

Θέμα 3 : α)Να αποδείξετε ότι δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο της μεθόδου απότομης καθόδου είναι ορθογώνια. β)Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$.
(Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

Θέμα 4 : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

και $b = (0 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 5)^T$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

Θέμα 5 : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίστροφων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = \left(-\frac{1}{2} \;\; 1 \;\; -\frac{1}{2}\right)^T$. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την LU παραγοντοποίηση. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Φεβρουάριος 2015

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

Θέμα 1 : α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα x και y είναι ορθογώνεια μεταξύ τους αν και μόνο αν $\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$.
β) Αν $A \in R^{n,n}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A^T A$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Θέμα 2 : Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ όπου $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των οι μέθοδοι Jacobi, Gauss-Seidel, βέλτιστη SOR και η βέλτιστη μέθοδος παρεκβολής (extrapolated) της Gauss-Seidel.

Θέμα 3 : α) Να αποδείξετε ότι τα δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο $r^{(k-1)}$ και $r^{(k)}$ της μεθόδου απότομης καθόδου, είναι ορθογώνια μεταξύ των.
β) Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$.
(Να διατηρείτε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

Θέμα 4 : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

και $b = (-1 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 0)^T$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

Θέμα 5 : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μικρότερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντίστροφων δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1\,0\,0)^T$. Η λύση των συστημάτων να γίνει με την παραγοντοποίηση Cholesky.
(Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)